VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 9

Lokalni ekstremi funkcije više varijabla

Poglavlje 1

Lokalni ekstremi funkcije više varijabla

Definicija 1.0.1 *Za funkciju f dviju varijabli kažemo da ima* ***lokalni maksimum*** *u točki (x_0, y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve (x, y) iz te okoline vrijedi $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. Kažemo da f ima u točki (x_0, y_0)* ***globalni maksimum*** *ako je $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ za sve točke (x, y) iz domene funkcije f.*

Za funkciju f dviju varijabli kažemo da ima ***lokalni minimum*** *u točki (x_0, y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve (x, y) iz te okoline vrijedi $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. Kažemo da f ima u točki (x_0, y_0)* ***globalni minimum*** *ako je $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ za sve točke (x, y) iz domene funkcije f.*

Lokalne minimume i maksimume funkcije f zovemo ***lokalni ekstremi*** *funkcije f, dok globalni minimum i maksimum funkcije f zovemo* ***globalni ekstremi*** *funkcije f.*

Ispitivanje lokalnih i globalnih ekstrema zadane funkcije jedan je od osnovnih zadataka u matematičkoj analizi. Kod funkcija dviju varijabli taj je postupak nešto složeniji nego kod funkcija jedne varijable i može se podijeliti u dva dijela.

Najprije dajemo tzv. **nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema**: ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0) i ako parcijalne derivacije prvog reda u toj točki postoje, onda mora vrijediti

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Napomena:

Nužni uvjet za postojanje lokalnog ekstrema u praksi ćemo čitati "unatraške": da bismo našli sve točke u kojima se s obzirom na gornji kriterij uopće može postići lokalni ekstrem, moramo riješiti sustav jednadžbi $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Točke koje zadovoljavaju ovaj sustav shvaćamo kao *kandidate* među kojima ćemo potom tražiti lokalne ekstreme.

Nakon što pronađemo sve točke-kandidate, prelazimo na utvrđivanje koje od navedenih točaka predstavljaju lokalni minimum ili maksimum. Da bismo to utvrdili, potrebno je izračunati vrijednosti drugih parcijalnih derivacija u točkama-kandidatima.

Za svaku pojedinu točku (x_0, y_0), kandidata za lokalni ekstrem, označimo:

$A := f_{xx}(x_0, y_0), \quad B := f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0), \quad C := f_{yy}(x_0, y_0).$

Dalje, označimo $\Delta := AC - B^2$

Vrijedi sljedeće **pravilo**:

Ako za točku (x_0, y_0) kandidata za lokalni ekstrem (točka zadovoljava nužan uvjet) vrijedi:

(1) $\Delta > 0$, onda se u (x_0, y_0) postiže lokalni ekstrem i to:

  (a) lokalni maksimum ako je $A < 0$

  (b) lokalni minimum ako je $A > 0$

(2) $\Delta < 0$, onda f ne postiže ekstrem u (x_0, y_0), već je (x_0, y_0) tzv. sedlasta točka

(3) $\Delta = 0$, onda ne možemo izvući nikakav zaključak o tome ima li f u točki (x_0, y_0) lokalni ekstrem ili ne.

Napomena:

Slučaj (2) govori nešto više od same činjenice da u ispitivanoj točki funkcija ne postiže lokalni ekstrem. Naime, ako vrijedi $\Delta < 0$ u nekoj točki-kandidatu za lokalni ekstrem (x_0, y_0), onda u toj točki funkcija f ima tzv. *sedlo*, što je ekvivalent pojmu stacionarne točke kod funkcije jedne varijable. Naziv "sedlo" u ovom slučaju dobro dočarava izgled plohe funkcije f u okolini točke sedla.

Dalje, komentirajmo ukratko porijeklo veličine Δ. Vrijednosti parcijalnih derivacija u točki (x_0, y_0) mogu se organizirati u sljedeću matricu:

$$H := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{yx}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

pa vidimo da je $\Delta = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, dakle upravo determinanta gornje matrice koju zovemo Hesseova matrica. Primijetimo da je $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ prema Schwarzovom teoremu, pa stoga na sporednoj dijagonali u Hesseovoj matrici imamo jednake vrijednosti koje u Δ čine faktor B^2.

Primjer 1 Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Rješenje:

Najprije nalazimo prve parcijalne derivacije i rješavamo sustav $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$:

$f_x(x, y) = 4y - 4x^3 = 0$

$f_y(x, y) = 4x - 4y^3 = 0.$

Imamo $y = x^3$, $x = y^3$. Uvrštanjem $y = x^3$ u drugu jednadžbu dobivao $x = x^9$, što faktoriziranjem postaje

$x(x^8 - 1) = 0$

$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$

$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$

Zadnja dva faktora ne mogu biti jednaka nuli za realan x, pa nam ostaju tri rješenja: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Iz $y = x^3$ dobivamo $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$, pa ukupno imamo tri točke kandidata za ekstrem: $(0,0)$, $(1,1)$ i $(-1,-1)$.

Za svaku od ovih točaka provodimo proceduru utvrđivanja koja od njih predstavlja lokalni ekstrem. Da bismo to izračunali, nađimo najprije druge parcijalne derivacije funkcije f:

$f_{xx}(x,y) = -12x^2$
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4$
$f_{yy}(x,y) = -12y^2$.

Uvrštavanjem vrijednosti x i y koordinata u ove izraze dobivat ćemo za pojedine točke-kandidate vrijednosti za A, B i C, redom.

Računamo:

(a) točka $(0,0)$:
$A = f_{xx}(0,0) = 0$, $B = f_{xy}(0,0) = 4$, $C = f_{yy}(0,0) = 0$,
pa je $\Delta = AC - B^2 = -16 < 0$. Dakle, radi se o sedlastoj točki.

(b) točka $(1,1)$:
$A = f_{xx}(1,1) = -12$, $B = f_{xy}(1,1) = 4$, $C = f_{yy}(1,1) = -12$,
pa je $\Delta = AC - B^2 = 128 > 0$. Dakle, u $(1,1)$ postiže se lokalni ekstrem, i to maksimum, jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(1,1)$ iznosi $f(1,1) = 2$.

(c) točka $(-1,-1)$:
$A = f_{xx}(-1,-1) = -12$, $B = f_{xy}(-1,-1) = 4$, $C = f_{yy}(-1,-1) = -12$,
pa je opet $\Delta = 128 > 0$ i radi se o točki lokalnog maksimuma jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(-1,-1)$ opet iznosi $f(-1,-1) = 2$.

Primjer 2 Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = y \sin x$.

Rješenje:

Nužan uvjet za lokalne ekstreme daje sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) = y\cos x &= 0 \\ f_y(x,y) = \sin x &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu imamo za $\cos x$ vrijednost 1 ((za parne k) ili -1 (za neparne k), odakle nužno slijedi da je $y = 0$. Dakle, dobili smo beskonačno mnogo točaka kandidata za ekstrem oblika $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Računamo sada parcijalne derivacije drugog reda:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -y\sin x \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= \cos x \\ f_{yy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Imamo dvije mogućnosti, ovisno o tome je li k paran ili neparan:

(a) k paran, tj. $k = 2l$ za $l \in \mathbb{Z}$:
$A = f_{xx}(2l\pi, 0) = 0$, $B = f_{xy}(2l\pi, 0) = \cos(2l\pi) = 1$, $C = f_{yy}(2l\pi, 0) = 0$, pa je $\Delta = AC - B^2 = 0 - 1^2 = -1 < 0$, što znači da se su $(k\pi, 0)$, k paran, sedlaste točke

(b) k neparan, tj. $k = 2l + 1$ za $l \in \mathbb{Z}$: slično kao gore, imamo:
$A = f_{xx}((2l+1)\pi, 0) = 0$, $B = f_{xy}((2l+1)\pi, 0) = \cos((2l+1)\pi) = -1$, $C = f_{yy}((2l+1)\pi, 0) = 0$, pa je $\Delta = AC - B^2 = 0 - (-1)^2 = -1 < 0$, pa i u $(k\pi, 0)$, k paran, imamo sedlo.

Konačno, vidimo da ova funkcija nema niti jednu točku u svojoj domeni u kojoj se postiže lokalni ekstrem, već samo beskonačno mnogo sedlastih točaka (i sve su one oblika $(k\pi, 0)$ za $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 3 Odredite lokalne ekstreme funkcije:

(1) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

(2) $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$

(3) $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

(4) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

(5) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$

(6) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

(7) $f(x, y) = x^2 + y - e^y$

(8) $f(x, y) = xe^y$

(9) $f(x, y) = e^x \sin y$

(10) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Nešto drugačije postupamo ako je funkcija zadana implicitno (u osnovi samo stoga što je formula za nalaženje parcijalnih derivacija prvog reda u tom slučaju definirana drugačije – vidjeti vježbe vezane uz 7. lekciju!).

Primjer 4 Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno s $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$.

Rješenje:

Definiramo $F(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3$ i računamo:

$F_x(x, y, z) = 2x + z$

$F_y(x, y, z) = 4y$

$F_z(x, y, z) = x + 2z$.

Stoga je $z_x(x, y) = -\frac{2x+z}{x+2z}$, a $z_y(x, y) = -\frac{4y}{x+2z}$. Da bismo našli kandidate za lokalne ekstreme, moramo riješiti sustav $z_x(x, y) = z_y(x, y) = 0$, tj. $2x + z = 0 = 4y$. Dobivamo $y = 0$ i $z = -2x$, što uvrštanjem u jednadžbu plohe $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$ daje $x^2 = 1$, tj. $x_1 = 1$ ili $x_2 = -1$, pa je $z_1 = -2$, $z_2 = 2$. Imamo dvije točke koje su kandidati za ekstrem: $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

Izračunajmo sada druge parcijalne derivacije:

$z_{xx}(x,y) = -\frac{(2+z_x)(x+2z)-(2x+z)(1+2z_x)}{(x+2z)^2}$

$z_{yx}(x,y) = -\frac{z_y(x+2z)-(2x+z)\cdot 2z_y}{(x+2z)^2} = z_{xy}(x,y)$

$z_{yy}(x,y) = -\frac{4\cdot(x+2z)-4y\cdot 2z_y}{(x+2z)^2}$.

Sada računamo za svaku od dvije točke-kandidata radi li se o lokalnom ekstremu. Pritom ćemo koristiti činjenicu da je $z_x(1,0) = z_y(1,0) = 0$ i $z_x(-1,0) = z_y(-1,0) = 0$ (točke-kandidati zadovoljavaju nužan uvjet za ekstrem):

(a) točka $(1,0)$ $(z = -2)$: $A = z_{xx}(1,0) = \frac{2}{3}$, $B = z_{xy}(1,0) = 0$, $C = z_{yy}(1,0) = \frac{4}{3}$, pa je $\Delta = AC - B^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{9} > 0$ i u točki $(1,0)$ funkcija $z(x,y)$ postiže lokalni ekstrem. Kako je $A = \frac{2}{3} > 0$, radi se lokalnom minimumu koji iznosi $z = -2$.

(b) točka $(-1,0,2)$ $(z = 2)$: $A = z_{xx}(-1,0) = -\frac{2}{3}$, $B = z_{xy}(-1,0) = 0$, $C = z_{yy}(-1,0) = -\frac{4}{3}$, pa je $\Delta = AC - B^2 = \frac{8}{9} > 0$ i u točki $(-1,0)$ funkcija $z(x,y)$ postiže lokalni ekstrem. S obzirom da je $A = -\frac{2}{3} < 0$, radi se o lokalnom maksimumu koji iznosi $z = 2$.

Zadatak 5 Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x,y)$ zadane implicitno:

(1) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - z = 0$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - z - 1 = 0$

(3) $z^3 - 3z(x^2 + y^2) - 27 = 0$

(4) $xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4 = 0$

(5) $xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 28 = 0$

(6) $z^2 + 2z + x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0$

(7) $z^2 + xz + x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0$.

Često se pojavljuju problemski zadaci u kojima je potrebno najprije konstruirati funkciju dviju varijabli, a potom izračunati ekstreme.

Primjer 6 Od svih kvadara obujma 27 nađite onaj koji ima najmanje oplošje.

Rješenje: Oplošje kvadra je općenito funkcija triju varijabli: ako s a, b i c označimo duljine stranica kvadra, onda je oplošje $O = 2(ab + ac + bc)$, dok je volumen $V = abc$ i iznosi 27. Sada iz $abc = 27$ imamo $c = \frac{27}{ab}$, što uvrštavanjem u izraz za oplošje daje

$O = 2(ab + (a+b)c) = 2(ab + (a+b)\cdot\frac{27}{ab}) = 2(ab + \frac{27}{a} + \frac{27}{b})$.

Definirajmo funkciju $f(a,b) := ab + \frac{27}{a} + \frac{27}{b}$. Očito će točke lokalnih minimuma ove funkcije davati i najmanje vrijednosti oplošja, jer je $O(a,b) = 2f(a,b)$. Stoga najprije nalazimo kandidate za ekstrem rješavajući sustav $f_a(a,b) = 0 = f_b(a,b)$. Imamo

$f_a(a,b) = b - \frac{27}{a^2} = 0 \Rightarrow a^2b = 27$ i zbog simetričnosti funkcije $ab^2 = 27$.

Dijeljenjem ove dviju jednadžbi dobivamo $\frac{a^2b}{ab^2} = 1$, tj. $a = b$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu imamo $a^3 = 27 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow c = \frac{27}{3\cdot 3} = 3$. S obzirom da je $(3,3)$ jedina točka kandidat za lokalni ekstrem, očito je da je rješenje zadatka kvadar sa sve tri stranice duljine 3, dakle kocka. Minimalni obujam iznosi 54. Uvjerite se da se za točku $(3,3)$ doista radi o lokalnom minimumu funkcije f!

Zadatak 7 Među svim kvadrima oplošja 2 odredite onaj koji ima najveći obujam.

Zadatak 8 Na plohi $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ nađite točku najbližu točki $T(0,1,4)$.

Zadatak 9 Na elipsoidu $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ odredite točku najbližu ravnini $x + y + 2z = 12$.

Zadatak 10 U ravnini nađite točku sa svojstvom da je zbroj kvadrata udaljenosti od pravaca $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ najmanji.

Zadatak 11 Kroz točku $T(3,2,1)$ položite ravninu koja s koordinatnim ravninama zatvara piramidu najmanjeg obujma.

Zadatak 12 U polukuglu radijusa R upišite paralelepiped maksimalnog obujma kojem jedna strana leži u bazi polukugle.

Zadatak 13 U dio kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ koji se nalazi u prvom oktantu, upišite kvadar maksimalnog obujma tako da mu tri strane leže u koordinatnim ravninama.

Zadatak 14 U tetraedar određen točkama $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$ upišite kvadar maksimalnog obujma tako da mu jedan brid leži na $z-$osi.